

**Алявдин Петр Владимирович**, д-р техн. наук, профессор,  
Зеленогурский Университет, г. Зелена Гура  
**Буланов Георгий Валерьевич**, инженер-конструктор,  
РУП «Институт БелНИИС», г. Минск

## **РАСЧЕТ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ РАМ С УЧЕТОМ ПЛАСТИЧЕСКОГО И ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ**

## **ANALYSIS OF RS FRAMES TAKING IN ACCOUNT PLASTIC AND BRITTLE FRACTURE OF ELEMENTS**

### **Аннотация**

*В статье предложена математическая модель задачи оптимизации для расчета плоских железобетонных рам, содержащих упругопластические и хрупкие элементы. Принято, что нагрузка случайным образом изменяется в заданных пределах. Приведены примеры постановки оптимизационной задачи и расчета напряженно-деформированного состояния рамы вплоть до разрушения с использованием конечно-элементного комплекса.*

### **Abstract**

*In the paper the mathematical model of the optimization problem of analysis for reinforced concrete plane frames, containing elastic-plastic and brittle elements, is proposed. It is assumed that the load varies randomly within the specified limits. The examples of the optimization problem formulation and calculation of stress-strain state of the frame up to failure, using finite-element software, are given.*

### **ВВЕДЕНИЕ**

Отсутствие универсального метода определения механизмов хрупко-пластического разрушения железобетонных каркасов зданий усложняет оценку работы каркаса в запредельной стадии. Такая оценка требуется при расчете зданий на сейсмические воздействия [1-3], при анализе прогрессирующего разрушения [4], а также при выборе стратегий защиты зданий от особых воздействий [5]. Хотя территория Беларуси не находится в сейсмически опасной зоне, при проектировании высотных зданий согласно [6]

требуется расчет на сейсмические воздействия. Эффективные сейсмозащитные системы зачастую включают различные комбинации пластических и хрупких элементов [7], поглощающих энергию внешних воздействий.

Предельный и запредельный анализ упругопластических систем изучен во многих работах (например [8, 9]). В то же время важные вопросы, связанные с наличием в конструкциях хрупких элементов, рассмотрены до сих пор не были.

В данной работе на основе подхода, предложенного первым из авторов [10], формулируется задача оптимизации предельного анализа плоских стержневых систем в железобетонных каркасах зданий с учетом пластического и хрупкого разрушения элементов. Нагружение здесь принимается однократным, но значения нагрузок случайным (неопределенным) образом могут изменяться в заданных пределах. При этом в колоннах и ригелях зданий предусматривается возможность появления как пластического шарнира с последующим упругопластическим разрушением (от действия изгибающего момента), так и возможность хрупкого разрушения элементов (от действия поперечной силы). В результате решения задачи оптимизации определяется механизм разрушения железобетонного каркаса, находятся наиболее невыгодные параметры нагрузок и остаточные усилия в пластических элементах.

Второй подход к анализу напряженно-деформируемого состояния зданий использует итерационный метод пошагового нагружения системы, реализуемый в конечно-элементном программном комплексе, вплоть до разрушения. В этом случае нагрузки считаются детерминированными, с соответствующими коэффициентами запаса.

Приведены примеры формулировки задач оптимизации, а также решения задач расчета железобетонного каркаса с упругопластическими и упруго-хрупкими элементами.

#### **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ**

Принимаем здесь, что элементы железобетонных рам работают преимущественно на изгиб и (или) на срез. Однако в литературе существуют различные обобщенные схемы поведения сечений с учетом совокупности всех внутренних сил (например [11]); в этом случае необходимо воспользоваться подходом, изложенным в работе [9].

Оптимизационная задача для рам, содержащих упругопластические и хрупкие элементы, формулируется следующим образом. Требуется найти параметр  $F_0$  вектора нагрузок  $F$  и векторы внутренних усилий  $M^e, M^r$  такие, что:

$$F_0 \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$M^e = \omega F, \quad (2)$$

$$AM^r = 0, \quad (3)$$

$$-M_{pl^-} \leq M^e + M^r \leq M_{pl^+}, \quad (4)$$

$$\max_{i \in I_{br}} (-V_{br}^- - \Gamma^1 \Delta(M^{e^-} + M^r)_{br})_i \leq 0, \quad (5)$$

$$\max_{i \in I_{br}} (-V_{br}^+ + \Gamma^1 \Delta(M^{e^+} + M^r)_{br})_i \leq 0, \quad (6)$$

$$-F_0 F \leq F \leq F_0 F^+, \quad (7)$$

где  $\omega$  – матрица влияния нагрузок  $F$  на изгибающие моменты в сечениях упругопластических и упруго-хрупких элементов в упругой стадии работы;

$A$  – матрица совместности;

$M^e, M^r$  – векторы упругих и остаточных моментов в сечениях элементов;

$\Delta M_{br}$  – вектор разностей изгибающих моментов на концах элементов с хрупкими связями на сдвиг;

$M_{pl^-}, M_{pl^+}$  – векторы предельных значений для изгибающих моментов;

$V_{br^-}, V_{br^+}$  – векторы предельных значений для поперечных сил;

$I$  – диагональная матрица длин элементов;

$I_{br}$  – множество хрупких элементов.

Задача (1)–(7) представляет собой проблему линейного программирования (ЛП). Отметим, что ограничения значений (7) для нагрузок  $F$  были записаны ранее в различных работах, например, в [8]; здесь эти ограничения приняты в несколько другом виде.

### ФОРМУЛИРОВКА ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

В качестве примера рассмотрим формулировку оптимизационной задачи ЛП для рамы, показанной на рис. 1. Опасные сечения, в которых может развиваться механизм упругопластического или хрупкого разрушения, следует выбирать в характерных точках.

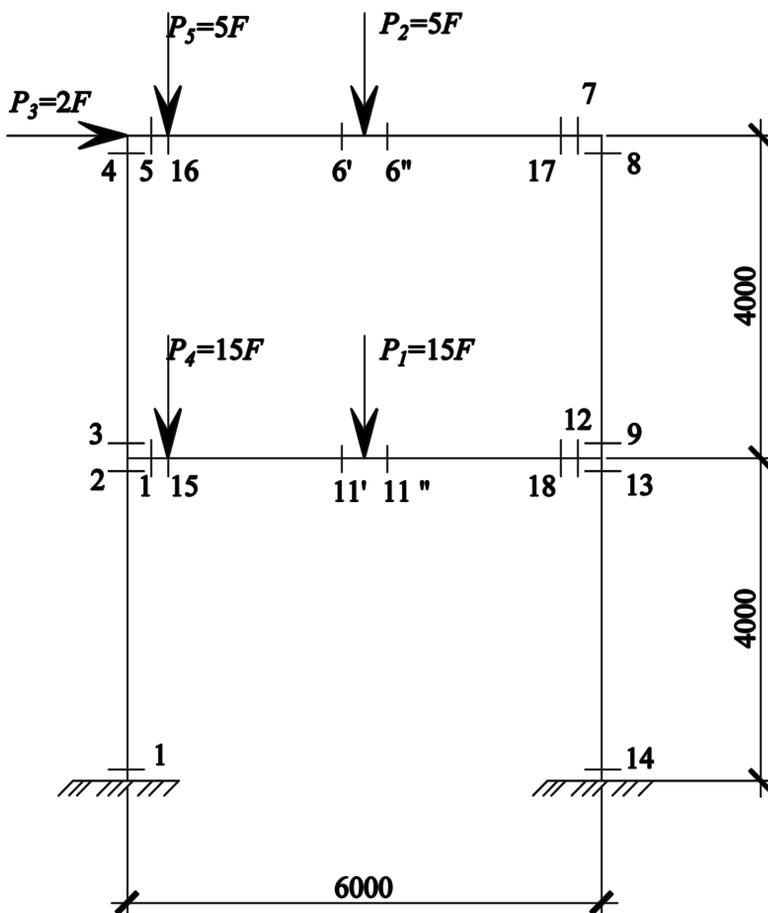


Рисунок 1. Схема рамы и сечений

Матрица совместности  $A_{pl}$  и вектор нагрузок  $F$  для упругопластических элементов имеют следующий вид:

$$\begin{matrix}
(M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & M_5 & M_6 & M_6 & M_7 & M_8 & M_9 & M_{10} & M_{11} & M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14}) \\
A_{pl} = & \begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} & ; F = & \begin{pmatrix}
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
2F \\
2F \\
10F \\
30F
\end{pmatrix} & (8)
\end{matrix}$$

Для составления данной матрицы использовались уравнения равновесия двух типов:

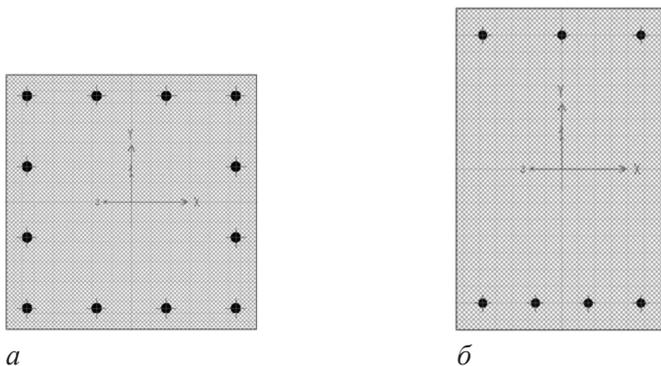
а) для отдельных узлов, выражающие сумму изгибающих моментов в узле, равную внешнему моменту, действующему на этот узел (первые шесть уравнений);

б) для этажей или пролетов, выражающие сумму проекций всех сил на соответствующую ось (последние четыре уравнения).

Для хрупких элементов матрица совместности  $A_{br}$  формируется аналогично матрице  $A_{pl}$ , при этом дополнительные строки и столбцы соответствуют опасным сечениям 15, 16, 17, 18. Эти сечения рекомендуется располагать на расстоянии  $h/2$  от узлов рамы ( $h$  – высота сечения колонны).

Компоненты векторов ограничений моментов  $M_{pl^-}$  и  $M_{pl^+}$  представляют собой сопротивление изгибающему моменту сечений колонн и ригелей в соответствующем направлении действия изгибающего момента.

Принято, что размеры сечений колонн рамы 400 x 400 мм; продольное армирование колонн из стержней 12 Ø 16 S500 приведено на рис. 2а. Аналогично размеры сечений ригелей – 400 x 600 мм, продольное армирование ригелей из стержней 7 Ø 16 S500 показано на рис. 2б. Поперечное армирование всех элементов рамы выполнено из стержней Ø 8 S500, с шагом 200 мм.



**Рисунок 2.** Поперечные сечения:  
 а – колонн рамы;  
 б – ригелей рамы

Для принятых размеров элементов неравенство (4) запишется следующим образом:

$$\begin{matrix}
 180 \\
 180 \\
 180 \\
 180 \\
 182 \\
 137 \\
 182 \\
 137 \\
 182 \\
 180 \\
 180 \\
 182 \\
 137 \\
 182 \\
 137 \\
 182 \\
 180 \\
 180 \\
 182 \\
 137 \\
 182 \\
 137 \\
 182 \\
 180 \\
 180
 \end{matrix}
 \leq M^e + M^r =
 \begin{matrix}
 M_1^e + M_1^r \\
 M_2^e + M_2^r \\
 M_3^e + M_3^r \\
 M_4^e + M_4^r \\
 M_5^e + M_5^r \\
 M_6^e + M_6^r \\
 M_6^{e'} + M_6^{r'} \\
 M_7^e + M_7^r \\
 M_8^e + M_8^r \\
 M_9^e + M_9^r \\
 M_{10}^e + M_{10}^r \\
 M_{11}^e + M_{11}^r \\
 M_{11}^{e'} + M_{11}^{r'} \\
 M_{12}^e + M_{12}^r \\
 M_{13}^e + M_{13}^r \\
 M_{14}^e + M_{14}^r
 \end{matrix}
 \leq M_{pl}^+ =
 \begin{matrix}
 180 \\
 180 \\
 180 \\
 180 \\
 137 \\
 182 \\
 137 \\
 182 \\
 180 \\
 180 \\
 137 \\
 182 \\
 137 \\
 182 \\
 180 \\
 180 \\
 180 \\
 182 \\
 180 \\
 137 \\
 182 \\
 137 \\
 182 \\
 180 \\
 180
 \end{matrix}
 \quad (9)$$

Поперечные силы выражаются через изгибающие моменты, действующие на концах элемента:

$$V_{br} = \Delta \mathbf{M}_{br} \mathbf{r}^l = \begin{pmatrix} M_2^e + M_1^e + M_2^r + M_1^r \\ M_4^e + M_3^e + M_4^r + M_3^r \\ M_6^e + M_5^e + M_6^r + M_5^r \\ M_7^e + M_6^{e'} + M_7^r + M_6^{r'} \\ M_9^e + M_8^e + M_9^r + M_8^r \\ M_{11}^{e'} + M_{10}^e + M_{11}^{r'} + M_{10}^r \\ M_{12}^e + M_{11}^{e'} + M_{12}^r + M_{11}^{r'} \\ M_{14}^e + M_{13}^e + M_{14}^r + M_{13}^r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \quad (10)$$

Компоненты векторов ограничений поперечных сил  $V_{br}^-$  и  $V_{br}^+$  представляют собой сопротивления срезу колонн и ригелей в соответствующем направлении действия поперечной силы. В результате неравенство (5), (6) запишется в следующем виде:

$$\max_{i \in I_{br}} (\pm) \begin{pmatrix} 138 \\ 138 \\ 216.5 \\ 216.5 \\ 138 \\ 216.5 \\ 216.5 \\ 138 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} M_2^e + M_1^e + M_2^r + M_1^r \\ M_4^e + M_3^e + M_4^r + M_3^r \\ M_6^e + M_5^e + M_6^r + M_5^r \\ M_7^e + M_6^{e'} + M_7^r + M_6^{r'} \\ M_9^e + M_8^e + M_9^r + M_8^r \\ M_{11}^{e'} + M_{10}^e + M_{11}^{r'} + M_{10}^r \\ M_{12}^e + M_{11}^{e'} + M_{12}^r + M_{11}^{r'} \\ M_{14}^e + M_{13}^e + M_{14}^r + M_{13}^r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \leq 0. \quad (11)$$

Таким образом, получены исходные данные для формирования условий задачи оптимизации с целью нахождения параметра вектора усилий  $F_0$  и векторов усилий  $\mathbf{M}_e, \mathbf{M}_r$ .

### РАСЧЕТ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ РАМ В НЕУПРУГОЙ СТАДИИ РАБОТЫ С ПРИМЕНЕНИЕМ МКЭ

Многие программные комплексы, реализованные на основе МКЭ, позволяют провести анализ работы конструкции в неупругой стадии с использованием пластических шарниров. Нагрузка при этом прикладывается с определенным шагом итерационно, вплоть до разрушения системы.

В данной статье выполнен расчет однопролетной двухэтажной рамы (рис. 3) с использованием программного комплекса SAP2000 [11], причем наряду с пластическим учтено также хрупкое разрушение элементов. Как и ранее, приняты длины колонн  $H = 4$  м и ригелей  $a = 6$  м.

В расчетной схеме использовались два типа связей. Первый тип моделирует работу поперечного сечения железобетонной конструкции под действием изгибающего момента. Зависимости момент-кривизна для поперечного сечения колонны и ригеля приведены соответственно на рис. 4 и 5.

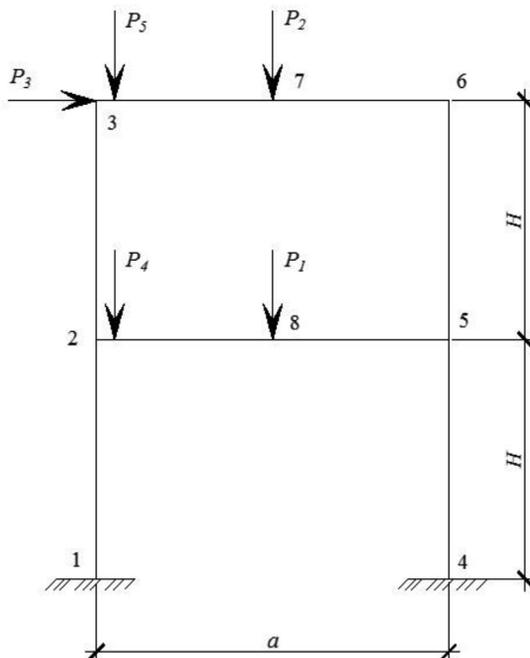
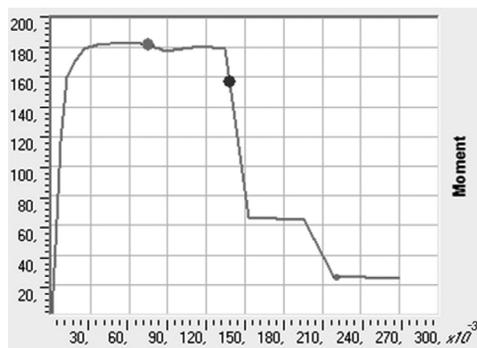
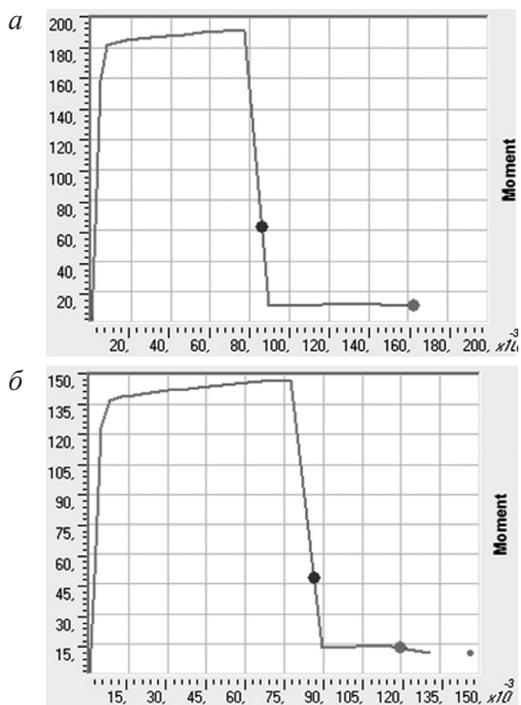


Рисунок 3. Расчетная схема рамы с номерами узлов КЭ



**Рисунок 4.** Зависимость момент-кривизна для поперечного сечения колонн

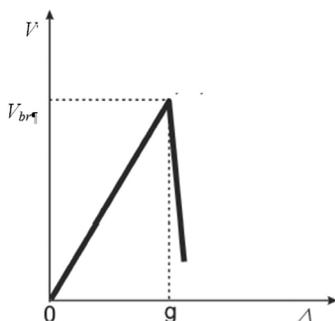


**Рисунок 5.** Зависимость момент-кривизна для поперечного сечения ригелей при:  
а – положительном изгибающем моменте;  
б – отрицательном изгибающем моменте

Для вычисления угла поворота сечения рамы требовалось определить длину пластического шарнира; эта длина находилась из формулы [2]:

$$L_{pl} = 0,1L_v + 0,17h + 0,24 \frac{d_{bl}f_y}{\sqrt{f_c}}, \quad (12)$$

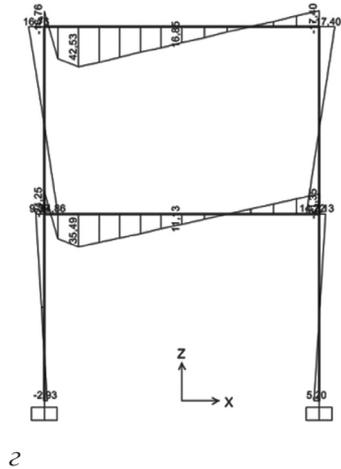
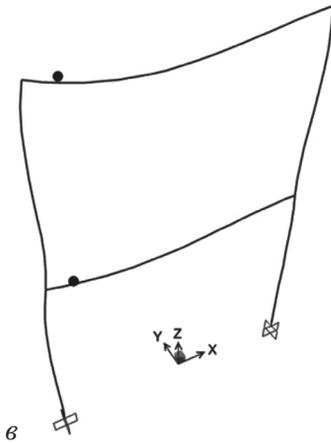
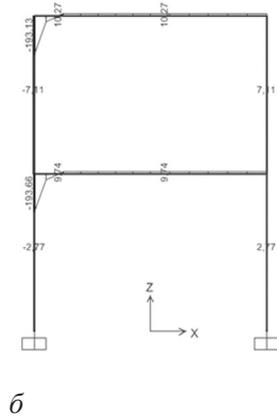
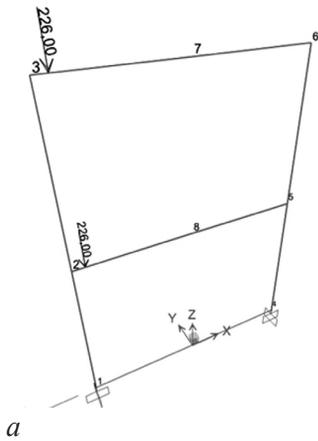
где  $h$  – высота поперечного сечения элемента;  
 $d_{bl}$  – (средний) диаметр растянутой арматуры;  
 $L_v = M/V$  – отношение момент/поперечная сила;  
 $f_c, f_y$  – нормативная прочность бетона на сжатие и нормативный предел текучести арматуры.



**Рисунок 6.** Зависимость «срезающее усилие  $V$  – деформация  $\Delta$ »

Второй тип связи моделирует работу элемента под действием поперечного усилия. Поскольку разрушение элемента конструкции в этом случае происходит хрупко (рис. 6), работа связи контролируется величиной усилия, а не деформации, как в случае первого типа (пластических шарниров). Сопротивление срезу железобетонных элементов определено с помощью метода ферменной аналогии, описанного в [3].

В качестве примеров в данной статье рассмотрены два варианта нагружения рамы. В первом варианте в процессе приращения нагрузки рама разрушается хрупко, при достижении поперечными усилиями  $V$  значения несущей способности на срез (рис. 7). Во втором варианте нагружения рама разрушается в результате образования в нескольких местах пластических шарниров и превращается в механизм (рис. 8) с сопутствующими большими перемещениями.

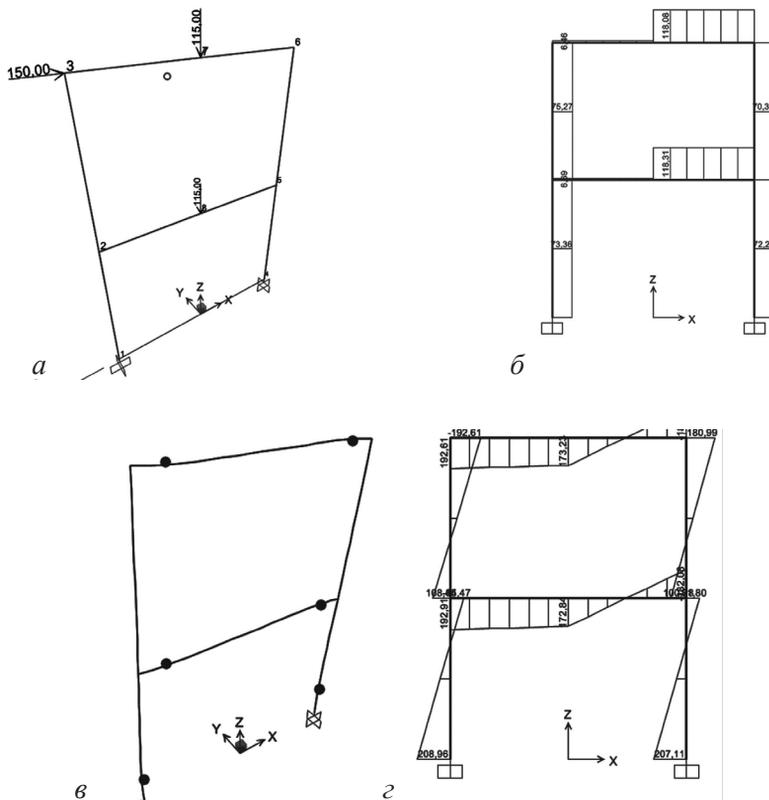


**Рисунок 7.** Вариант 1-й нагружения рамы:  
 а – величины разрушающей нагрузки;  
 б – эпюра поперечных сил в момент разрушения;  
 в – сечения, разрушающиеся от действия поперечной силы;  
 г – эпюра изгибающих моментов в момент разрушения

В первом случае предельные нагрузки в момент хрупкого разрушения были равны 226 кН. Вертикальное и горизонтальное перемещения достигли величины 1 мм.

Отметим, что хрупкое разрушение следует рассматривать с учетом импульсного динамического эффекта, возникающего в результате мгновенного разрушения конструкции. Простой способ расчета такого эффекта предложен в работе [12].

Во втором случае предельные нагрузки в момент пластического разрушения составили: горизонтальная – 150 кН, обе вертикальные – 115 кН. Горизонтальное перемещение верхней точки рамы составило 800 мм.



**Рисунок 8.** Вариант 2-й нагружения рамы:  
 а – величины разрушающей нагрузки;  
 б – эпюра поперечных сил в стадии разрушения;  
 в – сечения с пластическими шарнирами;  
 г – эпюра изгибающих моментов в стадии разрушения

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В данной статье рассмотрена задача оптимизации предельного анализа для оценки неупругой работы плоских железобетонных рам с учетом пластического и хрупкого разрушения элементов в условиях однократного нагружения. При этом нагрузки случайным образом изменяются в заданных пределах. Подобный подход может быть обобщен на случай повторно-переменного динамического воздействия без использования подробной информации об истории нагружений.

Приведенные примеры формулировки задач оптимизации, а также решения задач расчета железобетонного каркаса с упруго-пластическими и упруго-хрупкими элементами показывают эффективность предложенного подхода.

### **Список использованных источников**

1. Еврокод 8. Проектирование сейсмостойких конструкций. Часть 1. Общие правила, сейсмические воздействия и правила для зданий: ТКП EN 1998-1-2011. – Введ. 01.09.12. – Минск : Минстройархитектуры Респ. Беларусь, 2012. – 139 с.
2. Еврокод 8. Проектирование сейсмостойких конструкций. Часть 3. Оценка и модернизация зданий: ТКП EN 1998-3-2009. – Введ. 10.12.09. – Минск : Минстройархитектуры Респ. Беларусь, 2010. – 139 с.
3. Еврокод 2. Проектирование железобетонных конструкций. Часть 1-1. Общие правила и правила для зданий: ТКП EN 1992-1-1. – Введ. 10.12.09. – Минск : Минстройархитектуры Респ. Беларусь, 2010. – 191 с.
4. James C Dalton. Design of buildings to resist progressive collapse / James C Dalton, P.E. [etal.]. – USA, 2010. – 176 p.
5. Еврокод 1. Воздействия на конструкции. Часть 1-7. Общие воздействия. Особые воздействия: ТКП EN 1991-1-7-2009. – Введ. 10.12.09. – Минск : Минстройархитектуры Респ. Беларусь, 2010. – 64 с.
6. Высотные здания. Строительные нормы проектирования: ТКП 45-3.02-108-2008. – Введ. 12.06.08. – Минск : Минстройархитектуры Респ. Беларусь, 2008. – 85 с.
7. Минасян, А.В. Резервы несущей способности сейсмозащитных систем с точки зрения энергетических позиций / А.В. Минасян // Актуальные проблемы исследований по теории сооружений, Сборник научных статей Часть 1/ ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко. – Москва, 2009. – С. 270–276.

8. Čyras, A. Theory and methods of optimization of rigid-plastic systems / A. Čyras, A. Borkowski, R. Karcauskas. – Vilnius : Technika, 2004. – 354 p.
9. Алявдин, П.В. Предельный анализ конструкций при повторных нагрузениях / П.В.Алявдин. – Минск, УП «Технопринт», 2005. – 284 с.
10. Aliawdin, P., Muzychkin, Y. Limit analysis of structures with destructible elements under impact loadings / P. Aliawdin, Y. Muzychkin // Engineering Transactions. – 2011. – Vol. 59, № 3. – P. 139–159. (Rozprawy Inżynierskie).
11. CSI Analysis Reference Manual For SAP2000, ETABS, SAFE and CSiBridge / Computers and Structures, Inc. – USA, Berkeley, 2011 – 476 p.
12. Гениев, Г.А. Прочность и деформативность железобетонных конструкций при запроектных воздействиях / Гениев Г.А. [и др.] – М. : Изд-во Ассоциации строит. вузов, 2004. – 216 с.

*Статья поступила в редколлегию 29.10.2013*