

Киселёв Валентин Николаевич, канд. техн. наук, доцент,
УО «Полоцкий государственный университет»,
г. Новополоцк (Беларусь)

Гринёв Венедикт Демьянович, канд. техн. наук, доцент,
УО «Полоцкий государственный университет»,
г. Новополоцк (Беларусь)

Гиль Артур Иванович, ассистент, УО «Полоцкий государственный университет», г. Новополоцк (Беларусь)

О ВЛИЯНИИ ПРИНЯТОЙ ФОРМЫ НА ВЫСШИЕ ЧАСТОТЫ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ФЕРМЫ, ПРИ ИХ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПРИБЛИЖЁННЫМИ МЕТОДАМИ

ON THE IMPACT OF FORM ON THE HIGHEST FREQUENCY OF FREE OSCILLATIONS OF THE FARM, IN THEIR DETERMINATION BY APPROXIMATE METHODS

АННОТАЦИЯ

В работе рассматривается определение второй и третьей частот свободных колебаний стропильной фермы пролётом 36 м энергетическим методом при различных принятых формах. Полученные значения сравнивались с численными результатами, определенными на ЭВМ.

ABSTRACT

In this paper, consider the definition second and third frequency of free oscillations of the truss span of 36 m energy method adopted for different forms. Received values were compared with the exact results for certain computers.

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается определение второй и третьей частот свободных колебаний стропильной фермы пролётом 36 м энергетическим методом при различных принятых формах. Полученные значения сравнивались с численными результатами, определенными на ЭВМ.

Делается вывод о незначительном влиянии принятой формы на значение высших частот свободных колебаний фермы.

В работе рассматривается определение высших частот свободных колебаний стропильной фермы пролётом 36 м. Определение частоты является необходимым при расчёте конструкций здания на действие

динамических нагрузок, например, при установке в ферменном пространстве вентиляторов или другого оборудования, при сейсмических воздействиях и т. п.

Точное определение частот и форм колебаний представляет собой трудоёмкую задачу.

Определение второй и третьей частот свободных колебаний плоских ферм

Составление частотного уравнения, в которое входят перемещения δ_{ik} и его решение, как правило, требуют при большем числе масс применения ЭВМ. Но и в случае применения ЭВМ для вычисления единичных перемещений δ_{ik} требуется построение линий влияния усилий для всех стержней фермы, что приводит к большому количеству вычислений. Поэтому более оправданы приближенные методы определения частот и форм колебаний.

Значение частоты мало зависит от различных форм колебаний. Однако, исследование этого влияния ранее делалось только для основной частоты колебаний и только для простейших систем – балок на 2-х шарнирах опорах.

В настоящей работе рассмотрено влияние принятых форм колебаний для высших (у нас – для второй и третьей) частот на примере стропильных ферм, т.е. производится определение частот свободных колебаний при различных принятых формах колебания.

Если для определения основной частоты колебаний имеется несколько удобных и простых методов расчёта, то для определения высших частот известные приближенные методы являются весьма трудоёмкими.

Это, как правило, алгебраические методы, трудности которых состоят не только в решении, но и в самом составлении систем уравнений, где, как указывалось выше, нужно знать перемещения.

В настоящей работе применяется сравнительно новая методика. Она представляет собой модификацию энергетического метода в форме, предложенной для расчёта балок Р. Граммелем [2], и распространённую нами на фермы.

Этот приближённый метод расчёта позволяет легко определять как основную частоту, так и высшие частоты свободных колебаний фермы.

Определение круговой частоты свободных колебаний производится по формуле:

$$\omega_i^2 = \frac{\sum_k M_k \cdot x_{ik}^2(Z)}{\sum_n \frac{N_{in}^2 \cdot L_n}{EF_n}}, \quad (1)$$

где:

M_k – массы, сосредоточенные в узлах фермы, $x_{ik}(Z)$ – принятая форма свободных колебаний, соответствующая частоте, L_n – длина стержней фермы, F_n – площадь стержней фермы, E – модуль упругости, \bar{N}_{in} – усилия в стержнях фермы от загрузки условной нагрузкой.

Определение частоты сводится к загрузению фермы условной нагрузкой:

$$\bar{P}_{ik}^u = M_k \cdot X_{ik}(Z) \quad (2)$$

и определению усилий в стержнях от этого загрузения \bar{N}_{in} .

Для определения частот свободных колебаний рассматриваемым методом необходимо задаться формами свободных колебаний фермы:

$$X_i(Z),$$

где: X – амплитуда колебаний, i – номер формы главных колебаний, Z – текущая координата.

Функцией $X_i(Z)$ нужно задаваться, исходя из следующих условий: должны соблюдаться граничные условия, которые для свободно опертой фермы будут $X_i(0) = X_i''(0) = X_i(L) = X_i''(L) = 0$ (L – пролёт фермы). При этом число узлов по длине L должно быть равно $i=n$; функции $X_i(Z)$ должны быть ортогональными:

$$\sum_k X_{ik}(Z) \cdot X_{jk}(Z) = 0; (i \neq j).$$

В настоящей работе в качестве форм колебаний приняты следующие различные кривые, отвечающие граничным условиям:

1) Парабола 2-ой степени (рисунок 1, б)

$$x = 4 \cdot \frac{x_d}{a^2} \cdot Z(a - z) \quad (3)$$

2) Парабола 4-ой степени (рисунок 1, в)

$$X = X_a \cdot \frac{16}{5} \cdot \left(\frac{z}{a} - 2 \left(\frac{z}{a} \right)^3 + \left(\frac{z}{a} \right)^4 \right) \quad (4)$$

3) Синусоида (рисунок 1, г)

$$X = X_a \cdot \sin \frac{\pi}{a} \cdot z \quad (5)$$

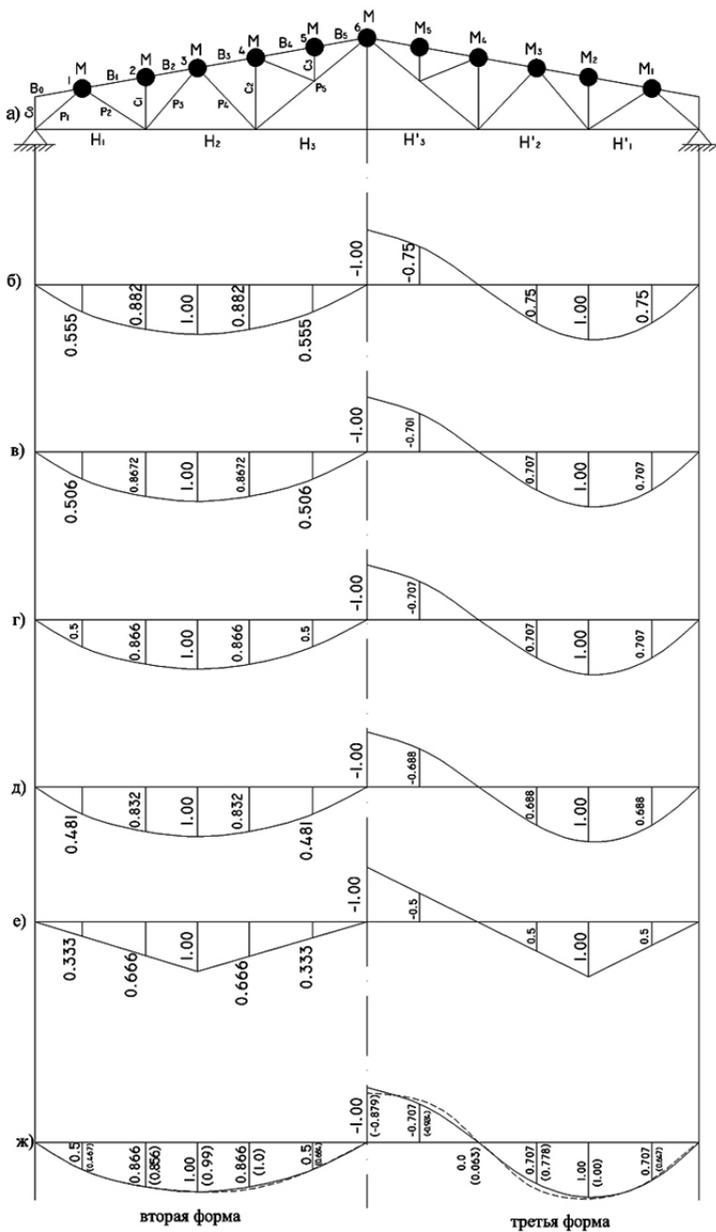


Рисунок 1. Форма колебаний

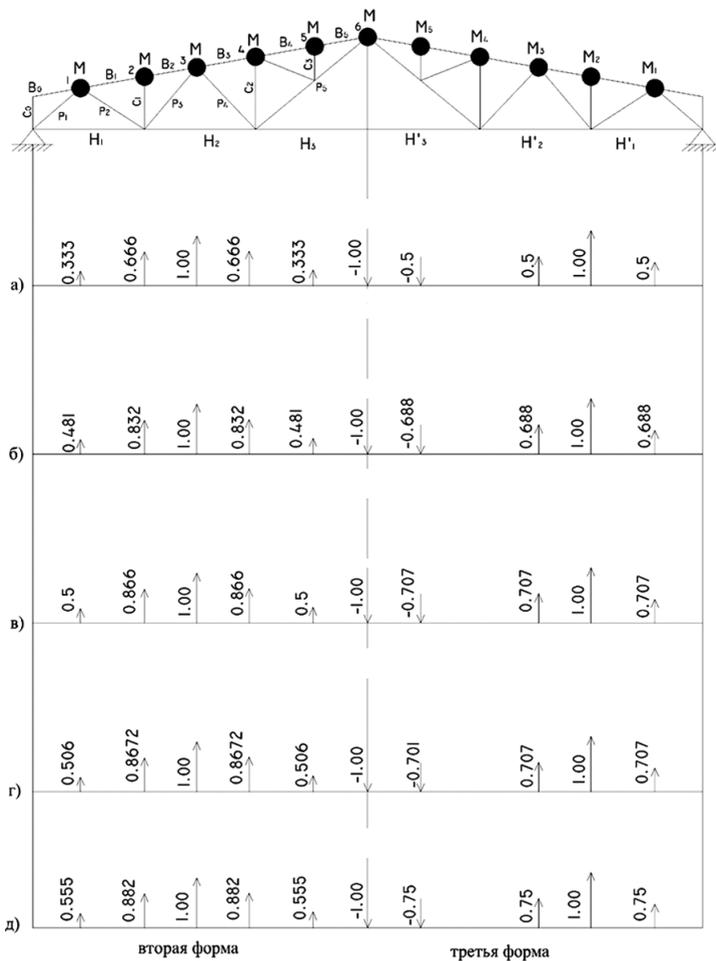


Рисунок 2. Формы загрузки узлов фермы

4) Парабола 3-ей степени (рисунке 1, д)

$$X = X_a \cdot \frac{3a^2z - 4z^3}{a^3} \quad (6)$$

5) Треугольник (рисунке 1, е)

$$X = X_a \cdot \frac{z}{a} \quad (7)$$

где a – длина, принятая за базис; для второй формы $a = \frac{l}{2}$, для третьей формы $a = \frac{l}{2}$.

Пример расчёта

Расчёт произведён для реальной фермы пролётом 36 м (рисунок 1, а).
Шаг ферм – 12 м.

Нагрузки от веса покрытия и собственного веса стальных конструкций – 450 кг/м^2 , от веса снега – 50 кг/м^2 .

Нагрузка на 1 пог. м. фермы $(450 \cdot 1 + 50 \cdot 0,8) \cdot 12 = 5880 \text{ кг/м}$,

здесь 1 и 0,8 – коэффициент для особого сочетания нагрузок.

$$Q_k = Q = 5,88 \cdot 3 = 17,64 \text{ м} \quad (8)$$

$$M_k = M = 17,64 : 9,81 = 1,8 \text{ м.сек}^2/\text{м}. \quad (9)$$

Для третьей формы колебаний (рисунок 1, в) для параболы 4-ой степени:

$$\sum_k M_k \cdot x_{3k}^2(z) = M \quad (10)$$

$$2 \cdot (0,701^2 + 1^2 + 0,701^2 + 0,701^2) + 1^2 = 5,9484 \text{ Мм.сек}^2/\text{м}.$$

Для параболы 2-ой степени (рисунок 1, б):

$$\sum_k M_k \cdot x_{3k}^2(z) = M \quad (11)$$

$$2 \cdot (0,75^2 + 1^2 + 0,75^2 + 0,75^2) + 1^2 = 6,375 \text{ Мм.сек}^2/\text{м}.$$

Для определения величины $\sum_n \frac{\bar{N}_{in}^2 \cdot l_n}{E \cdot F_n}$ загружаем фермы нагрузкой $M_k X_{ik}(z)$, как показано на рисунке 2 и определяем усилия в стержнях фермы от этой нагрузки N_{in} . Все данные вычисления сводим в таблицах 1 и 2.

Определяем круговую частоту для третьей формы колебаний для параболы 4-ой степени по формуле (1):

$$\omega_3^2 = \frac{5,9484}{1,9851 \cdot 10^{-3}} = 1,664 \frac{1}{\text{сек}^2}$$

$$\omega_3 = 40,8 \frac{1}{\text{сек}}; T_3 = \frac{2 \cdot 3,14}{40,8} = 0,1539 \text{ сек} \quad (12)$$

$$\sum_n \frac{\bar{N}_{3n}^2 \cdot l_n}{E \cdot F_n} 2 \cdot 99,2547 \cdot M^2 \cdot 10^{-5} = 1,9851 \cdot 10^{-3} \cdot M^2 (\text{мм.сек}^4) \quad (13)$$

$$\sum_n \frac{\bar{N}_{3n}^2 \cdot l_n}{E \cdot F_n} 2 \cdot 114,3739 \cdot M^2 \cdot 10^{-5} = 2,2875 \cdot 10^{-3} \cdot M^2 \quad (14)$$

Таблица определения величины $\sum_n \frac{N_{3n} \cdot l_n}{E \cdot F_n}$

Наименование стержня	Длина l_n (м)	Площадь F_n (м ²)	$\frac{l_n}{E \cdot F_n}$ м/2	\overline{N}_{3n} (т.сек ²)	\overline{N}_{3n}^2 (м ² .сек ⁴)	$\frac{\overline{N}_{3n} \cdot l_n}{E \cdot F_n}$ (т.м ² .сек ⁴)	\overline{N}_{3n} (т.сек ²)	\overline{N}_{3n}^2 (м ² .сек ⁴)	$\frac{\overline{N}_{3n}^2 \cdot l_n}{E \cdot F_n}$ (т.м ² .сек ⁴)
B ₁	6,048	1,208·10 ⁻²	2,380·10 ⁻⁵	-1,6599·М	2,7553·М ²	6,5567·М2·10 ⁻⁵	-1,8175·М	3,3033·М ²	7,8618·М2·10 ⁻⁵
B ₂	3,024	1,568·10 ⁻²	0,92·10 ⁻⁵	+0,003·М	0,00009	0,000008·М2·10 ⁻⁵	0,0025	0,0000625	0,000061·М2·10 ⁻⁵
B ₃	6,048	1,568·10 ⁻²	1,84·10 ⁻⁵	+0,003·М	0,00009	0,000017·М2·10 ⁻⁵	0,0025	0,0000625	0,00011·М2·10 ⁻⁵
H ₁	6,0	0,674·10 ⁻²	4,25·10 ⁻⁵	+1,4482·М	2,0973	0,9135·М2·10 ⁻⁵	2,1117	4,4593	18,952·М2·10 ⁻⁵
H ₂	6,0	1,208·10 ⁻²	2,36·10 ⁻⁵	1,1459·М	1,3131	3,0989·М2·10 ⁻⁵	2,286	5,2258	12,3329·М2·10 ⁻⁵
H ₃	6,0	1,208·10 ⁻²	2,36·10 ⁻⁵	-1,1878·М	1,4109	3,33·М2·10 ⁻⁵	-1,215	1,4762	3,4838·М2·10 ⁻⁵
P ₁	3,889	0,996·10 ⁻²	1,86·10 ⁻⁵	-1,8805·М	3,5363	6,5775·М2·10 ⁻⁵	-1,9575	3,8318	7,1271·М2·10 ⁻⁵
P ₂	3,889	0,494·10 ⁻²	3,72·10 ⁻⁵	0,4228·М	0,1788	0,6651·М2·10 ⁻⁵	0,4125	0,17016	0,633·М2·10 ⁻⁵
P ₃	4,405	0,494·10 ⁻²	4,26·10 ⁻⁵	1,0022·М	1,0044	4,2787·М2·10 ⁻⁵	1,01	1,0201	4,3456·М2·10 ⁻⁵
P ₄	4,405	0,212·10 ⁻²	9,9·10 ⁻⁵	-1,6503·М	2,7235	26,9626·М2·10 ⁻⁵	-1,3485	1,8184	18,0022·М2·10 ⁻⁵
P ₅	7,411	0,304·10 ⁻²	11,6·10 ⁻⁵	1,4459·М	2,0906	24,251·М2·10 ⁻⁵	1,4875	2,2126	25,6662·М2·10 ⁻⁵
P ₆	3,321	0,099·10 ⁻²	15,95·10 ⁻⁵	-0,6449·М	0,4159	6,6336·М2·10 ⁻⁵	-0,69	0,4761	7,5938·М2·10 ⁻⁵
C ₁	2,85	0,256·10 ⁻²	5,31·10 ⁻⁵	-1·М	1	5,31·М2·10 ⁻⁵	-1	1	5,31·М2·10 ⁻⁵
C ₂	3,6	0,304·10 ⁻²	5,64·10 ⁻⁵	0,35·М	0,1225	0,6909·М2·10 ⁻⁵	0,375	0,1406	0,793·М2·10 ⁻⁵
C ₃	1,8	0,212·10 ⁻²	4,04·10 ⁻⁵	0,701·М	0,4914	1,9853·М2·10 ⁻⁵	0,75·М	0,5625·М ²	2,2725·М2·10 ⁻⁵
Σ						99,2547·М2·10 ⁻⁵			114,3739·М2·10 ⁻⁵

$$\sum_n \frac{\overline{N}_{2n}^2 \cdot I_n}{E \cdot F_n} 2 \cdot 295,394 \cdot M^2 \cdot 10^{-5} = 0,5908 \cdot 10^{-2} \cdot M^2 \text{ (мм.сек}^4\text{)} \quad (15)$$

$$\sum_n \frac{\overline{N}_{2n}^2 \cdot I_n}{E \cdot F_n} 2 \cdot 289,555 \cdot M^2 \cdot 10^{-5} = 0,57911 \cdot 10^{-2} \cdot M^2 \text{ (мм.сек}^4\text{)} \quad (16)$$

для параболы 2-ой степени:

$$\omega_3^2 = \frac{6,375}{2,2875 \cdot 10^{-3} \cdot 1,8} = 1,54426 \frac{1}{\text{сек}^2}$$

$$\omega_3 = 39,3 \frac{1}{\text{сек}}, T_3 = \frac{2 \cdot 3,14}{39,3} = 0,1598 \text{ сек} \quad (17)$$

Определяем круговую частоту для второй формы колебаний для параболы 4-ой степени:

$$\omega_2^2 = \frac{6,034}{0,5908 \cdot 10^{-2}} = 567,6 \frac{1}{\text{сек}^2}$$

$$\omega_2 = 23,8 \frac{1}{\text{сек}} \quad (18)$$

для параболы 2-ой степени:

$$\omega_2^2 = \frac{6,034}{0,5908 \cdot 10^{-2}} = 581,6 \frac{1}{\text{сек}^2}$$

$$\omega_2 = 24,1 \frac{1}{\text{сек}} \quad (19)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким же образом были вычислены частоты свободных колебаний фермы при других принятых формах. Результаты вычислений сведены в таблице 3. Для оценки полученных результатов определения частот было сделано численное решение на ЭВМ.

Были составлены 2 уравнения движения, после чего частоты и формы свободных колебаний определялись как собственные значения и собственные векторы матрицы одиннадцатого порядка.

Точная форма колебаний приведена на рисунке 1, ж (пунктиром). Сравнение всех полученных результатов приведено в таблице 3.

Из выполненной работы можно сделать вывод о незначительном влиянии принятой формы на вторую и третью частоты свободных колебаний фермы при условии, что эти формы отвечают граничным условиям.

Таблица 3

Таблица сравнения результатов

Принятая форма колебаний	2-я частота		3-я частота	
	Значение 1/сек	Погрешность в %	Значения 1/сек	Погрешность в %
Точная форма	24,12	–1	40,4	–
Парабола 4-й степени	23,8	1,33	40,8	0,99
Парабола 3-й степени	24,66	2,24	41,1	1,73
Парабола 2-й степени	23,8	1,33	39,3	2,72
Треугольник	22,83	5,34	41,5	2,72
Синусоида	25,65	–	43,5	7,66

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Пановко, Я. Г. Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки / Я.Г. Пановко, И.И. Губанова. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
2. Бернштейн, С. А. Основы динамики сооружений / С.А. Барштейн. – М.: Стройиздат, 1941.
3. Безухов, Н. И. Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах : учебное пособие для строительных специальностей вузов / Н. И. Безухов, О. В. Лужин, Н. В. Колкунов . – 3-е изд., перераб. – М. : Высшая школа, 1987 . – 264 с.

Статья поступила в редколлегию 26.11.2014