

**Киселёв Валентин Николаевич**, канд. техн. наук, доцент,  
УО «Полоцкий государственный университет»,  
г. Новополоцк (Беларусь)

**Гринёв Венедикт Демьянович**, канд. техн. наук, доцент,  
УО «Полоцкий государственный университет»,  
г. Новополоцк (Беларусь)

**Гиль Артур Иванович**, ассистент, УО «Полоцкий государственный университет», г. Новополоцк (Беларусь)

## **О ВЛИЯНИИ ПРИНЯТОЙ ФОРМЫ НА ВЫСШИЕ ЧАСТОТЫ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ФЕРМЫ, ПРИ ИХ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПРИБЛИЖЁННЫМИ МЕТОДАМИ**

### **ON THE IMPACT OF FORM ON THE HIGHEST FREQUENCY OF FREE OSCILLATIONS OF THE FARM, IN THEIR DETERMINATION BY APPROXIMATE METHODS**

#### **АННОТАЦИЯ**

*В работе рассматривается определение второй и третьей частот свободных колебаний стропильной фермы пролётом 36 м энергетическим методом при различных принятых формах. Полученные значения сравнивались с численными результатами, определенными на ЭВМ.*

#### **ABSTRACT**

*In this paper, consider the definition second and third frequency of free oscillations of the truss span of 36 m energy method adopted for different forms. Received values were compared with the exact results for certain computers.*

#### **ВВЕДЕНИЕ**

В работе рассматривается определение второй и третьей частот свободных колебаний стропильной фермы пролётом 36 м энергетическим методом при различных принятых формах. Полученные значения сравнивались с численными результатами, определенными на ЭВМ.

Делается вывод о незначительном влиянии принятой формы на значение высших частот свободных колебаний фермы.

В работе рассматривается определение высших частот свободных колебаний стропильной фермы пролётом 36 м. Определение частоты является необходимым при расчёте конструкций здания на действие

динамических нагрузок, например, при установке в ферменном пространстве вентиляторов или другого оборудования, при сейсмических воздействиях и т. п.

Точное определение частот и форм колебаний представляет собой трудоёмкую задачу.

## **Определение второй и третьей частот свободных колебаний плоских ферм**

Составление частотного уравнения, в которое входят перемещения  $\delta_{ik}$  и его решение, как правило, требуют при большем числе масс применения ЭВМ. Но и в случае применения ЭВМ для вычисления единичных перемещений  $\delta_{ik}$  требуется построение линий влияния усилий для всех стержней фермы, что приводит к большому количеству вычислений. Поэтому более оправданы приближенные методы определения частот и форм колебаний.

Значение частоты мало зависит от различных форм колебаний. Однако, исследование этого влияния ранее делалось только для основной частоты колебаний и только для простейших систем – балок на 2-х шарнирах опорах.

В настоящей работе рассмотрено влияние принятых форм колебаний для высших (у нас – для второй и третьей) частот на примере стропильных ферм, т.е. производится определение частот свободных колебаний при различных принятых формах колебания.

Если для определения основной частоты колебаний имеется несколько удобных и простых методов расчёта, то для определения высших частот известные приближенные методы являются весьма трудоёмкими.

Это, как правило, алгебраические методы, трудности которых состоят не только в решении, но и в самом составлении систем уравнений, где, как указывалось выше, нужно знать перемещения.

В настоящей работе применяется сравнительно новая методика. Она представляет собой модификацию энергетического метода в форме, предложенной для расчёта балок Р. Граммелем [2], и распространённую нами на фермы.

Этот приближённый метод расчёта позволяет легко определять как основную частоту, так и высшие частоты свободных колебаний фермы.

Определение круговой частоты свободных колебаний производится по формуле:

$$\omega_i^2 = \frac{\sum_k M_k \cdot x_{ik}^2(Z)}{\sum_n \frac{N_{in}^2 \cdot L_n}{EF_n}}, \quad (1)$$

где:

$M_k$  – массы, сосредоточенные в узлах фермы,  $x_{ik}(Z)$  – принятая форма свободных колебаний, соответствующая частоте,  $L_n$  – длина стержней фермы,  $F_n$  – площадь стержней фермы,  $E$  – модуль упругости,  $\bar{N}_{in}$  – усилия в стержнях фермы от загрузки условной нагрузкой.

Определение частоты сводится к загрузке фермы условной нагрузкой:

$$\bar{P}_{ik}^u = M_k \cdot X_{ik}(Z) \quad (2)$$

и определению усилий в стержнях от этого нагружения  $\bar{N}_{in}$ .

Для определения частот свободных колебаний рассматриваемым методом необходимо задаться формами свободных колебаний фермы:

$$X_i(Z),$$

где:  $X$  – амплитуда колебаний,  $i$  – номер формы главных колебаний,  $Z$  – текущая координата.

Функцией  $X_i(Z)$  нужно задаваться, исходя из следующих условий: должны соблюдаться граничные условия, которые для свободно опертой фермы будут  $X_i(0) = X_i''(0) = X_i(L) = X_i''(L) = 0$  ( $L$  – пролёт фермы). При этом число узлов по длине  $L$  должно быть равно  $i=n$ ; функции  $X_i(Z)$  должны быть ортогональными:

$$\sum_k X_{ik}(Z) \cdot X_{jk}(Z) = 0; (i \neq j).$$

В настоящей работе в качестве форм колебаний приняты следующие различные кривые, отвечающие граничным условиям:

1) Парабола 2-ой степени (рисунок 1, б)

$$x = 4 \cdot \frac{x_d}{a^2} \cdot Z(a - z) \quad (3)$$

2) Парабола 4-ой степени (рисунок 1, в)

$$X = X_a \cdot \frac{16}{5} \cdot \left( \frac{z}{a} - 2 \left( \frac{z}{a} \right)^3 + \left( \frac{z}{a} \right)^4 \right) \quad (4)$$

3) Синусоида (рисунок 1, г)

$$X = X_a \cdot \sin \frac{\pi}{a} \cdot z \quad (5)$$

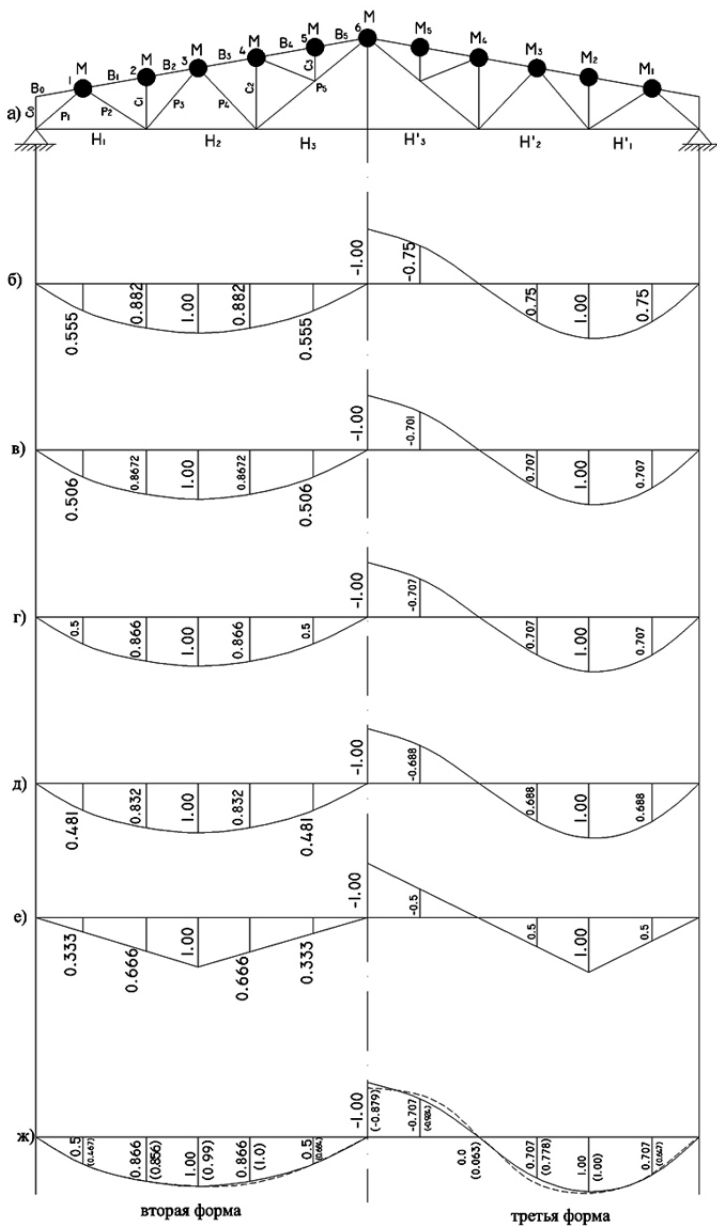


Рисунок 1. Форма колебаний



### Пример расчёта

Расчёт произведён для реальной фермы пролётом 36 м (рисунок 1, а).  
Шаг ферм – 12 м.

Нагрузки от веса покрытия и собственного веса стальных конструкций –  $450 \text{ кг/м}^2$ , от веса снега –  $50 \text{ кг/м}^2$ .

Нагрузка на 1 пог. м. фермы  $(450 \cdot 1 + 50 \cdot 0,8) \cdot 12 = 5880 \text{ кг/м}$ ,

здесь 1 и 0,8 – коэффициент для особого сочетания нагрузок.

$$Q_k = Q = 5,88 \cdot 3 = 17,64 \text{ м} \quad (8)$$

$$M_k = M = 17,64 : 9,81 = 1,8 \text{ м.сек}^2/\text{м}. \quad (9)$$

Для третьей формы колебаний (рисунок 1, в) для параболы 4-ой степени:

$$\sum_k M_k \cdot x_{3k}^2(z) = M \quad (10)$$

$$2 \cdot (0,701^2 + 1^2 + 0,701^2 + 0,701^2) + 1^2 = 5,9484 \text{ Мм.сек}^2/\text{м}.$$

Для параболы 2-ой степени (рисунок 1, б):

$$\sum_k M_k \cdot x_{3k}^2(z) = M \quad (11)$$

$$2 \cdot (0,75^2 + 1^2 + 0,75^2 + 0,75^2) + 1^2 = 6,375 \text{ Мм.сек}^2/\text{м}.$$

Для определения величины  $\sum_n \frac{\bar{N}_{in}^2 \cdot l_n}{E \cdot F_n}$  загружаем фермы нагрузкой  $M_k X_{ik}(z)$ , как показано на рисунке 2 и определяем усилия в стержнях фермы от этой нагрузки  $N_{in}$ . Все данные вычисления сводим в таблицах 1 и 2.

Определяем круговую частоту для третьей формы колебаний для параболы 4-ой степени по формуле (1):

$$\omega_3^2 = \frac{5,9484}{1,9851 \cdot 10^{-3}} = 1,664 \frac{1}{\text{сек}^2}$$

$$\omega_3 = 40,8 \frac{1}{\text{сек}}; T_3 = \frac{2 \cdot 3,14}{40,8} = 0,1539 \text{ сек} \quad (12)$$

$$\sum_n \frac{\bar{N}_{3n}^2 \cdot l_n}{E \cdot F_n} 2 \cdot 99,2547 \cdot M^2 \cdot 10^{-5} = 1,9851 \cdot 10^{-3} \cdot M^2 (\text{мм.сек}^4) \quad (13)$$

$$\sum_n \frac{\bar{N}_{3n}^2 \cdot l_n}{E \cdot F_n} 2 \cdot 114,3739 \cdot M^2 \cdot 10^{-5} = 2,2875 \cdot 10^{-3} \cdot M^2 \quad (14)$$

Таблица определения величины  $\sum_n \frac{N_{3n} \cdot l_n}{E \cdot F_n}$ 

Наименование стержня	Длина $l_n$ (м)	Площадь $F_n$ (м <sup>2</sup> )	$\frac{l_n}{E \cdot F_n}$ м/2	$\overline{N}_{3n}$ (т.сек <sup>2</sup> )	$\overline{N}_{3n}^2$ (м <sup>2</sup> .сек <sup>4</sup> )	$\frac{\overline{N}_{3n} \cdot l_n}{E \cdot F_n}$ (т.м <sup>2</sup> .сек <sup>4</sup> )	$\overline{N}_{3n}$ (т.сек <sup>2</sup> )	$\overline{N}_{3n}^2$ (м <sup>2</sup> .сек <sup>4</sup> )	$\frac{\overline{N}_{3n}^2 \cdot l_n}{E \cdot F_n}$ (т.м <sup>2</sup> .сек <sup>4</sup> )
B <sub>1</sub>	6,048	1,208·10 <sup>-2</sup>	2,380·10 <sup>-5</sup>	-1,6599·М	2,7553·М <sup>2</sup>	6,5567·М2·10 <sup>-5</sup>	-1,8175·М	3,3033·М <sup>2</sup>	7,8618·М2·10 <sup>-5</sup>
B <sub>2</sub>	3,024	1,568·10 <sup>-2</sup>	0,92·10 <sup>-5</sup>	+0,003·М	0,000009	0,000008·М2·10 <sup>-5</sup>	0,0025	0,0000625	0,000061·М2·10 <sup>-5</sup>
B <sub>3</sub>	6,048	1,568·10 <sup>-2</sup>	1,84·10 <sup>-5</sup>	+0,003·М	0,000009	0,000017·М2·10 <sup>-5</sup>	0,0025	0,0000625	0,00011·М2·10 <sup>-5</sup>
H <sub>1</sub>	6,0	0,674·10 <sup>-2</sup>	4,25·10 <sup>-5</sup>	+1,4482·М	2,0973	0,9135·М2·10 <sup>-5</sup>	2,1117	4,4593	18,952·М2·10 <sup>-5</sup>
H <sub>2</sub>	6,0	1,208·10 <sup>-2</sup>	2,36·10 <sup>-5</sup>	1,1459·М	1,3131	3,0989·М2·10 <sup>-5</sup>	2,286	5,2258	12,3329·М2·10 <sup>-5</sup>
H <sub>3</sub>	6,0	1,208·10 <sup>-2</sup>	2,36·10 <sup>-5</sup>	-1,1878·М	1,4109	3,33·М2·10 <sup>-5</sup>	-1,215	1,4762	3,4838·М2·10 <sup>-5</sup>
P <sub>1</sub>	3,889	0,996·10 <sup>-2</sup>	1,86·10 <sup>-5</sup>	-1,8805·М	3,5363	6,5775·М2·10 <sup>-5</sup>	-1,9575	3,8318	7,1271·М2·10 <sup>-5</sup>
P <sub>2</sub>	3,889	0,494·10 <sup>-2</sup>	3,72·10 <sup>-5</sup>	0,4228·М	0,1788	0,6651·М2·10 <sup>-5</sup>	0,4125	0,17016	0,633·М2·10 <sup>-5</sup>
P <sub>3</sub>	4,405	0,494·10 <sup>-2</sup>	4,26·10 <sup>-5</sup>	1,0022·М	1,0044	4,2787·М2·10 <sup>-5</sup>	1,01	1,0201	4,3456·М2·10 <sup>-5</sup>
P <sub>4</sub>	4,405	0,212·10 <sup>-2</sup>	9,9·10 <sup>-5</sup>	-1,6503·М	2,7235	26,9626·М2·10 <sup>-5</sup>	-1,3485	1,8184	18,0022·М2·10 <sup>-5</sup>
P <sub>5</sub>	7,411	0,304·10 <sup>-2</sup>	11,6·10 <sup>-5</sup>	1,4459·М	2,0906	24,251·М2·10 <sup>-5</sup>	1,4875	2,2126	25,6662·М2·10 <sup>-5</sup>
P <sub>6</sub>	3,321	0,099·10 <sup>-2</sup>	15,95·10 <sup>-5</sup>	-0,6449·М	0,4159	6,6336·М2·10 <sup>-5</sup>	-0,69	0,4761	7,5938·М2·10 <sup>-5</sup>
C <sub>1</sub>	2,85	0,256·10 <sup>-2</sup>	5,31·10 <sup>-5</sup>	-1·М	1	5,31·М2·10 <sup>-5</sup>	-1	1	5,31·М2·10 <sup>-5</sup>
C <sub>2</sub>	3,6	0,304·10 <sup>-2</sup>	5,64·10 <sup>-5</sup>	0,35·М	0,1225	0,6909·М2·10 <sup>-5</sup>	0,375	0,1406	0,793·М2·10 <sup>-5</sup>
C <sub>3</sub>	1,8	0,212·10 <sup>-2</sup>	4,04·10 <sup>-5</sup>	0,701·М	0,4914	1,9853·М2·10 <sup>-5</sup>	0,75·М	0,5625·М <sup>2</sup>	2,2725·М2·10 <sup>-5</sup>
Σ						99,2547·М2·10 <sup>-5</sup>			114,3739·М2·10 <sup>-5</sup>





$$\sum_n \frac{\overline{N}_{2n}^2 \cdot I_n}{E \cdot F_n} 2 \cdot 295,394 \cdot M^2 \cdot 10^{-5} = 0,5908 \cdot 10^{-2} \cdot M^2 \text{ (мм.сек}^4\text{)} \quad (15)$$

$$\sum_n \frac{\overline{N}_{2n}^2 \cdot I_n}{E \cdot F_n} 2 \cdot 289,555 \cdot M^2 \cdot 10^{-5} = 0,57911 \cdot 10^{-2} \cdot M^2 \text{ (мм.сек}^4\text{)} \quad (16)$$

для параболы 2-ой степени:

$$\omega_3^2 = \frac{6,375}{2,2875 \cdot 10^{-3} \cdot 1,8} = 1,54426 \frac{1}{\text{сек}^2}$$

$$\omega_3 = 39,3 \frac{1}{\text{сек}}, T_3 = \frac{2 \cdot 3,14}{39,3} = 0,1598 \text{ сек} \quad (17)$$

Определяем круговую частоту для второй формы колебаний для параболы 4-ой степени:

$$\omega_2^2 = \frac{6,034}{0,5908 \cdot 10^{-2}} = 567,6 \frac{1}{\text{сек}^2}$$

$$\omega_2 = 23,8 \frac{1}{\text{сек}} \quad (18)$$

для параболы 2-ой степени:

$$\omega_2^2 = \frac{6,034}{0,5908 \cdot 10^{-2}} = 581,6 \frac{1}{\text{сек}^2}$$

$$\omega_2 = 24,1 \frac{1}{\text{сек}} \quad (19)$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким же образом были вычислены частоты свободных колебаний фермы при других принятых формах. Результаты вычислений сведены в таблице 3. Для оценки полученных результатов определения частот было сделано численное решение на ЭВМ.

Были составлены 2 уравнения движения, после чего частоты и формы свободных колебаний определялись как собственные значения и собственные векторы матрицы одиннадцатого порядка.

Точная форма колебаний приведена на рисунке 1, ж (пунктиром). Сравнение всех полученных результатов приведено в таблице 3.

Из выполненной работы можно сделать вывод о незначительном влиянии принятой формы на вторую и третью частоты свободных колебаний фермы при условии, что эти формы отвечают граничным условиям.

Таблица 3

**Таблица сравнения результатов**

Принятая форма колебаний	2-я частота		3-я частота	
	Значение 1/сек	Погрешность в %	Значения 1/сек	Погрешность в %
Точная форма	24,12	–1	40,4	–
Парабола 4-й степени	23,8	1,33	40,8	0,99
Парабола 3-й степени	24,66	2,24	41,1	1,73
Парабола 2-й степени	23,8	1,33	39,3	2,72
Треугольник	22,83	5,34	41,5	2,72
Синусоида	25,65	–	43,5	7,66

### **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Пановко, Я. Г. Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки / Я.Г. Пановко, И.И. Губанова. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
2. Бернштейн, С. А. Основы динамики сооружений / С.А. Барштейн. – М.: Стройиздат, 1941.
3. Безухов, Н. И. Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах : учебное пособие для строительных специальностей вузов / Н. И. Безухов, О. В. Лужин, Н. В. Колкунов . – 3-е изд., перераб . – М. : Высшая школа, 1987 . – 264 с.

*Статья поступила в редколлегию 26.11.2014*